16e ANNÉE N° 6 30 MARS 1905

Revue générale des Sciences pures et appliquées

DIRECTEUR : LOUIS OLIVIER, Docteur ès sciences.

CHRONIQUE ET CORRESPONDANCE

§ 1. — Mathématiques

La Théorie des ensembles. — Les travaux du Congrès de Heidelberg ont donné lieu à un fait assez paradoxal, auquel nous avons fait allusion en rendant compte de ces travaux [1]. Dans une séance de la Section d'Arithmétique, M. König a établi que le continu ne peut être mis sous la forme d'un ensemble *bien ordonné*, c'est-à-dire [2] que, si l'on convient d'une règle d'après laquelle, de deux nombres quelconques (compris entre 0 et 1), on dira lequel est l'*antérieur* et lequel est le *postérieur*, il est impossible de faire cette convention de manière que : 1° toutes les fois que a sera antérieur à b et b antérieur à c, a soit forcément antérieur à c; 2° une partie quelconque de l'ensemble considéré (celui des nombres compris entre 0 et 1) comprenne un élément antérieur à tous les autres.

Or, presque immédiatement après, M. Zermelo arrivait à cette conclusion que *tout ensemble peut être bien ordonné* : conclusion directement contraire à la précédente.

La démonstration de M. König n'a pas encore été publiée, à notre connaissance. Elle n'a été exposée qu'oralement. On ne peut donc la discuter quant à présent. La discussion sera, d'ailleurs, assez délicate, cette démonstration faisant intervenir les propriétés les moins classiques des nombres aleph de M. Cantor.

Celle de M. Zermelo a paru dans un fascicule récent des *Mathematische Annalen* : il est d'ores et déjà possible de se faire une opinion à son sujet.

Beaucoup de mathématiciens ont pensé trouver une lacune dans le point de départ même de la démonstration, point de départ sur lequel, d'ailleurs, l'auteur lui-même avait attiré l'attention à ce point de vue.

Considérons une infinité d'ensembles E, définis d'une manière plus ou moins compliquée et constituant eux-mêmes une collectivité dont chaque ensemble E est un individu.

Un des ensembles E étant donné, il est clair que, dans cet ensemble, on peut envisager en particulier un élément déterminé e. M. Zermelo suppose cette opération effectuée pour chacun des ensembles E qui constituent la collectivité donnée. C'est cette possibilité qui n'est pas considérée comme évidente. Nous avouons ne pouvoir nous associer à cette critique.

Certes, il n'est pas du tout évident que nous puissions, *en fait*, indiquer la loi qui présidera au choix de l'élément e dans chaque ensemble E. Mais où voit-on qu'une loi ait besoin de pouvoir être explicitement formulée pour exister ?

Nous ne saurions mieux faire que de renvoyer, sur ce point, à l'article que M. Tannery a consacré précédemment, dans la *Revue*, à la thèse de M. Couturat et à la notion de l'infini [1]. On y trouve [2] expliquée, avec une clarté qui nous paraît ne laisser de place à aucun doute, toute la différence entre une loi qui existe et une loi que nous pouvons caractériser en un nombre fini de mots, ou (comme le dit l'auteur) entre une correspondance *bien déterminée* et une correspondance qui peut être *décrite*.

Sans cette différence, notons que les courbes dites *topographiques* ne pourraient exister. Nous avons, il est vrai, entendu soutenir qu'en effet ces courbes n'existaient pas au point de vue mathématique, puisqu'elles n'étaient définies que physiquement, c'est-à-dire avec une certaine approximation. Cette objection, elle non plus, ne nous paraît pas probante. Les courbes topographiques ou empiriques ne nous sont *connues* que physiquement; elles peuvent même n'avoir qu'une existence approximative si l'on admet que les corps sont composés de molécules discrètes. Mais il en est, sans aucun doute, autrement dans l'hypothèse de la matière continue. Or, cette dernière est tout aussi mathématiquement possible que l'autre.

Il suffit, d'ailleurs, nous semble-t-il, d'approfondir un peu la notion de ce qu'on peut appeler *courbes définies mathématiquement* pour être conduit à la même conclusion. L'idée de courbe (ou, ce qui revient au même, de fonction) a été en s'élargissant progressivement depuis l'Antiquité. Les géomètres du commencement de ce siècle en avaient assurément une conception

[1] Voir la *Revue* du 15 novembre 1904.
[2] Voir l'article de M. Hilbert dans la *Revue* du 28 février 1901 (p. 169-170).

[1] *Rev. gén. des Sc.*, tome VIII, p. 129-140, 1897.
[2] P. 132-134.