SUR

LE DÉVELOPPEMENT DU QUOTIENT

DE DEUX SÉRIES HYPERGÉOMÉTRIQUES EN FRACTION CONTINUE INFINIE (1).

Œuvres de Riemann, 2e édit., p. 424.

§ I.

Lorsque l'on a une fraction continue infinie de la forme

$$a+\cfrac{b_1 x}{1+\cfrac{b_2 x}{1+\cfrac{b_3 x}{1+\ddots}}},$$

qui, pour des valeurs de x suffisamment petites, est convergente et représente la fonction $f(x)$, on voit facilement que la $m^{\text{ième}}$ réduite est égale au quotient $\frac{p_m}{q_m}$ de deux fonctions entières p_m et q_m, toutes deux de degré n lorsque $m=2n+1$ et de degrés n et $n-1$ lorsque $m=2n$. La différence entre la réduite et la fonction $f(x)$, lorsque x est infiniment petit, est infiniment petite de l'ordre m. Mais, pour que cela ait lieu, autant de conditions doivent être satisfaites qu'il est renfermé de quantités arbitraires dans la fonction fractionnaire égale à la réduite.

(1) La rédaction de ce Mémoire, dont l'origine remonte au mois d'octobre 1863, est due à M. H.-A. Schwarz. — (Weber et Dedekind.)

Les § I et II sont en italien. Le commencement du § III est encore en italien, sauf les additions de M. Schwarz, entre crochets, qui sont en allemand; ensuite, à partir de la remarque de M. Schwarz, p. 372, ligne 29, le texte est allemand et, comme auparavant, tout ce qui est entre crochets est dû à cet illustre Géomètre. — (L. L.)

Par conséquent, la $m^{\text{ième}}$ réduite peut être déterminée au moyen de la condition qu'elle coïncide avec la fonction en les m premiers termes du développement suivant les puissances de x en tenant compte des degrés du numérateur et du dénominateur, qui sont tous deux égaux à n pour $m = 2n+1$, et égaux à n et $n-1$ pour $m = 2n$.

§ II.

Cette manière de déterminer la réduite conduit immédiatement à l'expression de la réduite, lorsqu'il s'agit de développer le quotient de deux séries hypergéométriques

$$\mathrm{P}^{\alpha}\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix} = \mathrm{P}$$

et

$$\mathrm{P}^{\alpha}\begin{pmatrix} \alpha & \beta+1 & \gamma & x \\ \alpha'-1 & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix} = \mathrm{Q},$$

où l'on fera usage des propriétés caractéristiques exposées dans le Mémoire : *Contribution à la théorie des fonctions représentables par la série de Gauss* $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, page 61.

En effet, puisque, pour x infiniment petit, $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} - \frac{p_m}{q_m}$ devient infiniment petit de l'ordre m et $\mathrm{Q}q_m$ infiniment petit de l'ordre α, l'expression $q_m\mathrm{P} - p_m\mathrm{Q}$ devient infiniment petite de l'ordre $m+\alpha$, et l'on démontre aisément que cette expression possède toutes les propriétés caractéristiques d'une fonction développable en série hypergéométrique, en sorte que l'on a

$$(1)\quad \begin{cases} q_{2n+1}\mathrm{P} - p_{2n+1}\mathrm{Q} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} \alpha+2n+1 & \beta-n & \gamma & x \\ \alpha'-1 & \beta'-n & \gamma' & \end{pmatrix} \\ \qquad = x^n\,\mathrm{P}\begin{pmatrix} \alpha+n+1 & \beta & \gamma & x \\ \alpha'-n-1 & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix} = x^n\,\mathrm{P}_{n+1}, \\ q_{2n}\mathrm{P} - p_{2n}\mathrm{Q} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} \alpha+2n & \beta+1-n & \gamma & x \\ \alpha'-1 & \beta'-n & \gamma' & \end{pmatrix} = x^n\,\mathrm{Q}_n, \end{cases}$$

où P_n, Q_n désignent ce que deviennent P et Q quand on remplace α, α' par $\alpha+n$, $\alpha'-n$. Or, si nous faisons varier d'une manière continue x et les fonctions de x de telle sorte que l'affixe de la valeur complexe x décrit un circuit entourant l'affixe de 1, p_m et q_m reprendront les mêmes valeurs, et P, Q, P_n, Q_n se transformeront en d'autres branches de ces fonctions.

Par conséquent, si nous désignons par P', Q', P'_n, Q'_n les autres branches correspondantes de ces fonctions, nous avons aussi

$$(2) \qquad \begin{cases} q_{2n+1}P' - p_{2n+1}Q' = x^n P'_{n+1}, \\ q_{2n} \quad P' - p_{2n} \quad Q' = x^n Q'. \end{cases}$$

Des équations (1) et (2) l'on tire

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = \frac{PP'_{n+1} - P'P_{n+1}}{QP'_{n+1} - Q'P_{n+1}},$$

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{PQ'_n - P'Q_n}{QQ'_n - Q'Q_n}.$$

Par suite, pour trouver les valeurs de x pour lesquelles $\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$ et $\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$ convergent vers $\frac{P}{Q}$, il suffit de rechercher en quels cas $\frac{P_n}{P'_n}$ et $\frac{Q_n}{Q'_n}$ convergent vers zéro, pour n croissant indéfiniment.

[§ III.]

A cet effet, il convient d'introduire les expressions de P_n et Q_n par des intégrales définies. Posant

$$\begin{aligned} [-\alpha' - \beta' - \gamma' &= a, \\ -\alpha' - \beta - \gamma &= b, \\ -\alpha - \beta' - \gamma &= c], \end{aligned}$$

on peut exprimer P_n par

$$\left[x^{\alpha+n}(1-x)^\gamma \int_0^1 s^{a+n} \quad (1-s)^{b+n}(1-xs)^{c-n}\,ds\right]$$

et Q_n par

$$\left[x^{\alpha+n}(1-x)^\gamma \int_0^1 s^{a+1+n}(1-s)^{b+n}(1-xs)^{c-n}\,ds\right].$$

Pour avoir la valeur générale des fonctions P_n, Q_n on aurait besoin de multiplier les intégrales par des facteurs constants, mais nous pouvons substituer les intégrales dans les équations (1) en comprenant les facteurs constants dans les fonctions entières p_m, q_m. Quant aux valeurs des fonctions sous le signe d'intégration, les valeurs que l'on prendra sont indifférentes, pourvu que dans chaque intégrale l'on prenne pour s^a, $(1-s)^b$, $(1-xs)^c$ les mêmes valeurs.

[Maintenant les expressions pour $\frac{p_m}{q_m}$ restent encore inaltérées lorsque l'on remplace P', Q', P'_n, Q'_n par les mêmes combinaisons linéaires de ces grandeurs et des grandeurs P, Q, P_n, Q_n :

$$AP + BP', \qquad AQ + BQ', \qquad AP_n + BP'_n, \qquad AQ_n + BQ'_n,$$

où A et B désignent deux constantes, la constante B n'étant jamais nulle. On obtient de telles fonctions correspondantes, lorsque les précédentes intégrales, au lieu d'être prises de 0 à 1, le sont depuis une quelconque des quatre valeurs 0, 1, $\frac{1}{x}$, ∞ jusqu'à une quelconque de ces quatre valeurs, et cela toutes étant prises le long du même chemin.]

Par suite, nous pouvons prendre pour P'_n, Q'_n ces intégrales prises l'une après l'autre autour de $\frac{1}{x}$.

Les intégrales [par lesquelles, en vertu de ce qui précède, sont exprimés P_n, Q_n, P'_n, Q'_n, ne changent pas de valeur lorsque le chemin d'intégration varie d'une manière continue entre les limites indiquées], puisque le chemin d'intégration ne dépasse pas l'affixe de $\frac{1}{x}$; et nous pouvons disposer du chemin d'intégration, de telle sorte que l'on puisse trouver plus facilement la limite vers laquelle converge la valeur de l'intégrale, pour n croissant.

A cet effet

$$\frac{s(1-s)}{1-xs}\ldots.$$

[Ici s'arrête le texte de Riemann; mais, à l'aide de quelques figures et formules employées par Riemann, on peut reproduire les conclusions peut-être de la manière suivante :

Posons]

$$\frac{s(1-s)}{1-xs} = e^{f(s)},$$

[et considérons dans le plan de la grandeur complexe s les courbes le long desquelles le module de $e^{f(s)}$ a une valeur constante. Pour de très petites valeurs de ce module, ces courbes entourent les points 0 et 1, à peu près comme le feraient des cercles concentriques de rayons assez petits. Pour de très grandes valeurs du module, ces courbes entourent le point $s = \frac{1}{x}$ et le point $s = \infty$. Dans les deux cas, les courbes sont donc formées de deux portions séparées. Si l'on fait croître le module en partant des petites valeurs, les portions séparées qui entourent les points 0 et 1 et qui correspondent à la même valeur du module se rapprochent toujours l'une de l'autre de plus en plus jusqu'à ce qu'elles ne forment plus qu'une seule courbe qui possède un point double. Pour ce point double, $f'(s)$ doit être égale à zéro. La considération pareille a lieu lorsque, partant de très grandes valeurs, on fait décroître le module en question.

On obtient les équations suivantes :]

$$f(s) = \log(1-s) - \log\left(\frac{1}{s} - x\right),$$

$$f'(s) = -\frac{1}{1-s} + \frac{1}{\frac{1}{s} - x}\,\frac{1}{s^2} = \frac{1-2s+xs^2}{s(1-s)(1-xs)}.$$

[Pour $f'(s) = 0$ on a, par conséquent]

$$1-2s+xs^2 = 0, \quad s(1-xs) = 1-s, \quad 1-2s+s^2 = (1-x)s^2 = (1-s)^2,$$

$$\frac{1}{s} - 1 = \sqrt{1-x} = 1-xs, \quad \frac{1-s}{1-xs} = s.$$

[Maintenant on désignera par $\sqrt{1-x}$ cette valeur du radical carré dont la partie réelle est *positive*, en excluant de nos considérations le cas où x est réel et $\geqq 1$. Ensuite, on pourra désigner par σ, σ' les deux racines de l'équation quadratique

$$1-2s+xs^2 = 0,$$

où

$$\sigma = \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}, \qquad \sigma' = \frac{1}{1-\sqrt{1-x}},$$

de telle sorte que le module de σ est *plus petit* que le module de σ'.

On a alors

$$e^{f(\sigma)} = \sigma^2 = \left(\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right)^2, \qquad e^{f(\sigma')} = \sigma'^2 = \left(\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}\right)^2.$$

Concevons maintenant que le point $s = 0$ soit joint au point $s = 1$ par une ligne passant par le point $s = \sigma$ et telle que, en cheminant le long de cette ligne, le module de $e^{f(s)}$ croisse continuellement sur le chemin conduisant de $s = 0$ jusqu'à $s = \sigma$, tandis que sur le chemin conduisant de $s = \sigma$ jusqu'à $s = 1$ ce module décroisse continuellement. Une telle ligne peut servir de chemin d'intégration pour les intégrales prises de $s = 0$ jusqu'à $s = 1$, intégrales au moyen desquelles sont exprimées les fonctions P_n, Q_n.

D'autre part, pour ces intégrales qui peuvent remplacer les fonctions P'_n, Q'_n, on peut employer un chemin d'intégration qui conduit d'abord du point $s = 1$ jusqu'au point $s = \sigma'$, et qui rejoint ensuite le point $s = 1$ en tournant autour du point $s = \frac{1}{x}$. Ce chemin d'intégration peut être choisi de telle sorte que le module de $e^{f(s)}$ atteigne son maximum sur cette ligne seulement au point $s = \sigma'$.

Dans les *fig.* 13 et 14, dont on a trouvé l'esquisse faite par Riemann même, les chemins d'intégration sont indiqués par les lignes ponctuées.

Fig. 13.

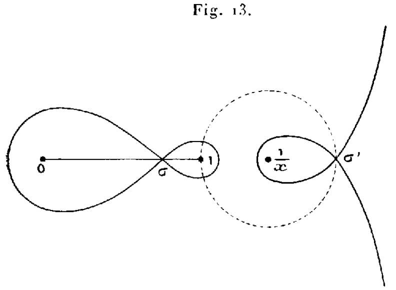
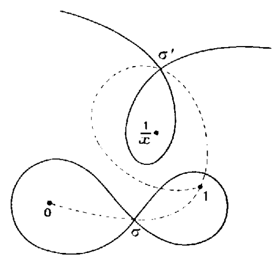


Fig. 14.



Il s'agit alors de trouver maintenant une expression qui donne une représentation asymptotique de la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 s^{a+n}(1-s)^{b+n}(1-xs)^{c-n}\,ds$$

pour les valeurs infiniment grandes de n. On posera

$$s^a(1-s)^b(1-xs)^c = \varphi(s);$$

on a donc à évaluer

$$\int_0^1 e^{nf(s)}\varphi(s)\,ds,$$

pour $n=\infty$.

Ces portions du chemin d'intégration, qui ne sont pas situées dans le voisinage de la valeur singulière $s=\sigma$, apportent à la valeur de l'intégrale une contribution qui, pour les valeurs infiniment grandes de n, est non seulement infiniment petite, mais encore (puisque la partie réelle de $n[f(\sigma)-f(s)]$, sous les hypothèses en question, croît au delà de toute mesure) est infiniment petite par rapport à cette partie de l'intégrale qui est relative à une portion du chemin d'intégration, située dans le voisinage de la valeur $s=\sigma$. De là résulte que pour trouver une expression asymptotique de l'intégrale en question, valable pour $\lim n=\infty$, il suffit de restreindre la sommation à une portion du chemin d'intégration, située dans le voisinage de la valeur $s=\sigma$.

Posons donc, h désignant une grandeur, dont le module ne peut prendre que de petites valeurs,]

$$s=\sigma+h,$$

$$f(s)=f(\sigma)+\frac{1}{2}f''(\sigma)h^2+(h^3),$$

$$nf(s)=nf(\sigma)+n\frac{f''(\sigma)}{2}h^2+n(h^3),$$

$$-n\frac{f''(\sigma)}{2}h^2=z^2,$$

$$dh=\frac{dz}{\sqrt{-n\dfrac{f''(\sigma)}{2}}},$$

$$e^{nf(s)}=e^{nf(\sigma)}e^{-z^2+\left(\frac{z^3}{\sqrt{n}}\right)},$$

$$e^{nf(s)}\varphi(s)\,ds=e^{nf(\sigma)}\varphi\left(\sigma+\frac{z}{\sqrt{-n\dfrac{f''(\sigma)}{2}}}\right)e^{-z^2}\frac{dz}{\sqrt{-n\dfrac{f''(\sigma)}{2}}}.$$

[Maintenant, si l'on suppose que la portion du chemin d'intégration, située dans le voisinage du point $s=\sigma$, est rectiligne, et cela de telle sorte que l'angle droit, formé par les deux tangentes à la courbe

$$\text{mod.}\, e^{f(s)} = \text{mod.}\, e^{f(\sigma)}$$

au point $s=\sigma$, est partagé par moitié par ledit chemin, alors, pour $\lim n = \infty$, les limites de l'intégration relative à la variable z convergent respectivement vers les valeurs $-\infty$ et $+\infty$, et, par suite, la contribution qu'apportent à la valeur de l'intégrale considérée les éléments de celle-ci qui sont situés dans le voisinage de la valeur $s=\sigma$, est, pour de très grandes valeurs de n, asymptotiquement égale à

$$\frac{e^{nf(\sigma)}\varphi(\sigma)}{\sqrt{-n\frac{f''(\sigma)}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz = \sqrt{\frac{\pi}{-\frac{f''(\sigma)}{2}}}\;\frac{e^{nf(\sigma)}}{\sqrt{n}}\,\varphi(\sigma).$$

Maintenant, on a

$$e^{nf(\sigma)} = \sigma^{2n} = \left(\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{2n}, \qquad -\frac{f''(\sigma)}{2} = \frac{1}{\sigma(1-\sigma)} = \frac{1}{\sigma^2(1-x)},$$

$$\varphi(\sigma) = \sigma^{(a+b)}(1-x)^{\frac{b+c}{2}}.$$

Par conséquent, la valeur asymptotique de

$$\int_0^1 e^{nf(s)}\varphi(s)\,ds$$

est égale à

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{2n+a+b+1}(1-x)^{\frac{b+c}{2}+\frac{1}{4}}.$$

Par un raisonnement analogue, on trouvera que la valeur asymptotique de

$$\int_1^1 e^{nf(s)}\varphi(s)\,ds$$

est

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}\right)^{2n+a+b+1}(1-x)^{\frac{b+c}{2}+\frac{1}{4}}.$$

Sous les hypothèses assignées, on obtient par conséquent, pour le quotient $P_n : P'_n$, la valeur asymptotique :]

$$\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{2n+a+b+1}$$

[Pour toutes les valeurs de x, à l'exception de celles qui sont réelles et plus grandes que 1, et de même à l'exception de la valeur $x = 1$, le quotient $P_n : P'_n$ converge vers zéro pour n croissant indéfiniment.

Lorsque l'on change a en $a+1$, on trouve qu'il en est de même du quotient $Q_n : Q'_n$.

On a donc ainsi démontré que les réduites de la fraction continue, de la forme donnée au § I sous laquelle peut être développé le quotient

$$\frac{P^{\alpha}\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix}}{P^{\alpha}\begin{pmatrix} \alpha & \beta+1 & \gamma & x \\ \alpha'-1 & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix}},$$

convergent vers la valeur de ce quotient, quand l'indice est croissant, pour toutes les valeurs de x qui ne sont pas réelles et en même temps $\geqq 1$.]