XXIII.

LETTRE A LEGENDRE.

Monsieur. La lettre que Vous avez bien voulu m'adresser en date du 25 octobre m'a causé la plus vive joie. Je compte parmi les momens les plus heureux de ma vie celui où j'ai vu mes essais mériter l'attention de l'un des plus grands géomètres de notre siècle. Cela a porté au plus haut degré mon zèle pour mes études. Je les continuerai avec ardeur, mais si je suis assez heureux pour faire quelques découvertes, je les attribuerai à Vous plutôt qu'à moi, car certainement je n'aurais rien fait sans avoir été guidé par Vos lumières.

J'accepte avec reconnaissance l'exemplaire de Votre traité des fonctions elliptiques que Vous voulez bien m'offrir.

Je m'empresserai de Vous donner les éclaircissemens que Vous m'avez fait l'honneur de me demander. Lorsque je dis que le nombre de transformations différentes, correspondantes à un nombre premier n, est $6(n+1)$, j'entends par cela qu'on peut trouver $6(n+1)$ valeurs différentes pour le module c', en supposant l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} = \varepsilon \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

et en mettant pour y une fonction rationnelle de la forme:

$$y = \frac{A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n}{B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n}.$$

C'est en effet ce qui a lieu; mais parmi les valeurs de c' il y en aura $n+1$ qui répondent à la forme suivante de y:

$$y = \frac{A_1 x + A_3 x^3 + A_5 x^5 + \cdots + A_n x^n}{1 + B_2 x^2 + B_4 x^4 + \cdots + B_{n-1} x^{n-1}}.$$

Ce sont ces $n+1$ modules dont parle M. *Jacobi*. Ils sont en effet racines d'une même équation du degré $n+1$. Ces $n+1$ valeurs étant supposées connues, il est facile d'avoir les $5(n+1)$ autres.

En effet, en désignant par c' un quelconque des modules, on aura encore ceux-ci:

$$\frac{1}{c'},\quad \left(\frac{1-\sqrt{c'}}{1+\sqrt{c'}}\right)^2,\quad \left(\frac{1+\sqrt{c'}}{1-\sqrt{c'}}\right)^2,\quad \left(\frac{1-\sqrt{-c'}}{1+\sqrt{-c'}}\right)^2,\quad \left(\frac{1+\sqrt{-c'}}{1-\sqrt{-c'}}\right)^2,$$

auxquelles répondent les valeurs suivantes de y:

$$c'y',\quad \frac{1+\sqrt{c'}}{1-\sqrt{c'}}\cdot\frac{1\pm y'\sqrt{c'}}{1\mp y'\sqrt{c'}},\quad \frac{1-\sqrt{c'}}{1+\sqrt{c'}}\cdot\frac{1\pm y'\sqrt{c'}}{1\mp y'\sqrt{c'}},\quad \frac{1+\sqrt{-c'}}{1-\sqrt{-c'}}\cdot\frac{1\pm y'\sqrt{-c'}}{1\mp y'\sqrt{-c'}},$$
$$\frac{1-\sqrt{-c'}}{1+\sqrt{-c'}}\cdot\frac{1\pm y'\sqrt{-c'}}{1\mp y'\sqrt{-c'}},$$

ce qu'il est facile de vérifier, en faisant la substitution dans l'équation différentielle.

Toutes les $6(n+1)$ valeurs du module c' sont différentes entre elles, excepté pour quelques valeurs particulières de c. Dans ce qui précède, n est supposé impair et plus grand que l'unité. Si n est égal à deux, c' aura encore $6(n+1)=18$ valeurs différentes. De ces 18 valeurs il y aura six qui répondent à une valeur de y de la forme:

$$y = \frac{a + bx^2}{a' + b'x^2};$$

ce sont:

$$c' = \frac{1\pm c}{1\mp c},\quad \frac{1\pm\sqrt{1-c^2}}{1\mp\sqrt{1-c^2}},\quad \frac{c\pm\sqrt{c^2-1}}{c\mp\sqrt{c^2-1}}.$$

Il y en aura quatre qui répondent à une valeur de y de la forme $y = \frac{ax}{1+bx^2}$, savoir:

$$c' = \frac{2\sqrt{\pm c}}{1\pm c},\quad \frac{1\pm c}{2\sqrt{\pm c}},\quad y = (1\pm c)\frac{x}{1\pm cx^2} \text{ etc.}$$

Enfin pour les huit autres modules, y aura la forme:

$$a\frac{A+Bx+Cx^2}{A-Bx+Cx^2}.$$

Ces huit modules seront

$$c'=\left(\frac{\sqrt{1\pm c}\pm\sqrt{\pm 2\sqrt{\pm c}}}{\sqrt{1\pm c}\mp\sqrt{\pm 2\sqrt{\pm c}}}\right)^2.$$

J'ai donné des développemens plus étendus sur cet objet dans un mémoire imprimé dans le cahier 4 du tome III du journal de M. *Crelle**). Peut-être en aurez-vous déjà connaissance.

Les fonctions elliptiques jouissent d'une certaine propriété bien remarquable et que je crois nouvelle. Si l'on fait pour abréger:

$$\Delta x=\pm\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)},$$

$$\Pi x=\int\frac{dx}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\Delta x},\quad \varpi x=\int\frac{dx}{\Delta x},\quad \varpi_0 x=\int\frac{x^2\,dx}{\Delta x},$$

on aura toujours:

$$\varpi x_1+\varpi x_2+\cdots+\varpi x_\mu=C,$$

$$\varpi_0 x_1+\varpi_0 x_2+\cdots+\varpi_0 x_\mu=C+p,$$

où p est une quantité algébrique, et

$$\Pi x_1+\Pi x_2+\cdots+\Pi x_\mu=C-\frac{a}{2\Delta a}\log\left(\frac{fa+\varphi a.\Delta a}{fa-\varphi a.\Delta a}\right),$$

si l'on suppose les variables $x_1, x_2 \ldots x_\mu$ liées entre elles de manière à satisfaire à une équation de la forme:

$$(fx)^2-(\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2)=A(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)\ldots(x^2-x_\mu^2);$$

fx et φx étant deux fonctions entières quelconques de *l'indéterminée* x, mais dont l'une est *paire*, l'autre *impaire*. Cette propriété me paraît d'autant plus remarquable qu'elle appartiendra à toute fonction transcendante

$$\Pi x=\int\frac{dx}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\Delta x},$$

en supposant $(\Delta x)^2$ fonction entière quelconque de x^2. J'en ai donné la démonstration dans un petit mémoire inséré dans le cahier 4 du tome III du journal de M. *Crelle***). Vous verrez que rien n'est plus simple que d'établir

*) T. I, p. 457 de cette édition.

**) T. I, p. 444 de cette édition.

cette propriété générale. Elle m'a été fort utile dans mes recherches sur les fonctions elliptiques. En effet j'ai fondé sur elle toute la théorie de ces fonctions. Les circonstances ne me permettent point de publier un ouvrage de quelque étendue que j'ai composé depuis peu, car ici je ne trouverai personne qui le fasse imprimer à ses frais. C'est pourquoi j'en ai fait un extrait, qui paraîtra dans le journal de M. *Crelle**). La première partie, dans laquelle j'ai considéré les fonctions elliptiques en général, doit paraître dans le cahier prochain. Il me serait infiniment intéressant de savoir votre jugement sur ma méthode. Je me suis surtout attaché à donner de la généralité à mes recherches. Je ne sais si j'ai pu y réussir. La seconde partie qui suivra incessament la première, traitera principalement des fonctions avec des modules réels et moindres que l'unité. C'est surtout la fonction inverse de la première espèce qui est l'objet de mes recherches dans cette seconde partie. Cette fonction, dont j'ai démontré quelques-unes des propriétés les plus simples dans mes recherches sur les fonctions elliptiques, est d'un usage infini dans la théorie des fonctions elliptiques en général. Elle facilite à un degré inespéré la théorie de la transformation. Un premier essai sur cet objet est contenu dans le mémoire inséré dans le No. 138 du journal de M. *Schumacher***), mais actuellement je puis rendre cette théorie beaucoup plus simple.

La théorie des fonctions elliptiques m'a conduit à considérer deux nouvelles fonctions qui jouissent de plusieurs propriétés remarquables. Si l'on fait

$$y = \lambda(x),$$

où

$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}},$$

$\lambda(x)$ sera la fonction inverse de la première espèce. J'ai trouvé qu'on peut développer cette fonction de la manière suivante:

$$\lambda(x) = \frac{x + A_1 x^3 + A_2 x^5 + A_3 x^7 + \cdots}{1 + B_2 x^4 + B_3 x^6 + B_4 x^8 + \cdots},$$

où le numérateur et le dénominateur sont des séries *toujours convergentes* quelles que soient les valeurs de la variable x et du module c, réelles ou imaginaires. Les coefficiens $A_1, A_2, \ldots B_2, B_3, \ldots$ sont des fonctions entières de c^2. Si l'on pose

---

*) T. I, p. 518 de cette édition.

**) T. I, p. 403 de cette édition.

$$\varphi x = x + A_1 x^3 + A_2 x^5 + \cdots,$$
$$fx = 1 + B_2 x^4 + B_3 x^6 + \cdots,$$

où φx et fx sont les deux fonctions en question, elles auront la propriété exprimée par les deux équations:

$$\varphi(x+y) \cdot \varphi(x-y) = (\varphi x \,.\, fy)^2 - (\varphi y \,.\, fx)^2;$$
$$f(x+y) \cdot f(x-y) = (fx \,.\, fy)^2 - c^2 (\varphi x \,.\, \varphi y)^2,$$

x et y étant des quantités quelconques. On pourra représenter ces fonctions de beaucoup de manières. Par exemple on a:

$$\varphi\left(x \frac{\varpi}{\pi}\right) = A e^{ax^2} \sin x (1 - 2\cos 2x \,.\, q^2 + q^4)(1 - 2\cos 2x \,.\, q^4 + q^8)(1 - 2\cos 2x \,.\, q^6 + q^{12}) \ldots,$$

$$\varphi\left(x \frac{\omega}{\pi}\right) = A' e^{a'x^2} (e^x - e^{-x})(1 - p^2 e^{2x})(1 - p^2 e^{-2x})(1 - p^4 e^{2x})(1 - p^4 e^{-2x}) \ldots,$$

$$f\left(x \frac{\varpi}{\pi}\right) = B e^{ax^2} (1 - 2\cos 2x \,.\, q + q^2)(1 - 2\cos 2x \,.\, q^3 + q^6) \ldots,$$

$$f\left(x \frac{\omega}{\pi}\right) = B' e^{a'x^2} (1 - p e^{-2x})(1 - p e^{2x})(1 - p^3 e^{-2x})(1 - p^3 e^{2x}) \ldots,$$

où A, A', B, B', a, a' sont des quantités indépendantes de x, $q = e^{-\frac{\varpi}{\omega}\pi}$, $p = e^{-\frac{\omega}{\varpi}\pi}$; $\frac{\omega}{2}$ et $\frac{\varpi}{2}$ enfin sont les *fonctions complètes* correspondantes aux modules $b = \sqrt{1 - c^2}$ et c.

Outre les fonctions elliptiques, il y a deux autres branches de l'analyse dont je me suis beaucoup occupé, savoir la théorie de l'intégration des formules différentielles algébriques et la théorie des équations. A l'aide d'une méthode particulière j'ai trouvé beaucoup de résultats nouveaux, qui surtout jouissent d'une très grande généralité. Je suis parti du problème suivant de la théorie de l'intégration:

"Etant proposé un nombre quelconque d'intégrales $\int y\,dx$, $\int y_1\,dx$, $\int y_2\,dx$ etc., où $y, y_1, y_2, \ldots$ sont des fonctions algébriques quelconques de x, trouver toutes les relations possibles entre elles qui soient exprimables par des fonctions algébriques et logarithmiques".

J'ai trouvé d'abord qu'une relation quelconque doit avoir la forme suivante:

$$A\int y\,dx + A_1\int y_1\,dx + A_2\int y_2\,dx + \cdots = u + B_1 \log v_1 + B_2 \log v_2 + \cdots,$$

où A, A_1, A_2, ... B_1, B_2, ... etc. sont des constantes, et u, v_1, v_2, ... des fonctions *algébriques* de x. Ce théorème facilite extrêmement la solution du problème; mais le plus important est le suivant:

"Si une intégrale $\int y\,dx$, où y est lié à x par une équation algébrique quelconque, peut être exprimée d'une manière quelconque *explicitement ou implicitement* à l'aide de fonctions algébriques et logarithmiques, on pourra toujours supposer:

$$\int y\,dx = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_m \log v_m,$$

où A_1, A_2, ... sont des constantes, et u, v_1, v_2, ... v_m des *fonctions rationnelles* de x et y".

P. ex. si $y = \frac{r}{\sqrt{R}}$, où r et R sont des fonctions rationnelles, on aura dans tous les cas où $\int \frac{r\,dx}{\sqrt{R}}$ est intégrable

$$\int \frac{r\,dx}{\sqrt{R}} = p\sqrt{R} + A_1 \log\left(\frac{p_1 + q_1\sqrt{R}}{p_1 - q_1\sqrt{R}}\right) + A_2 \log\left(\frac{p_2 + q_2\sqrt{R}}{p_2 - q_2\sqrt{R}}\right) + \cdots$$

où p, p_1, p_2, ... q_1, q_2, ... sont des fonctions rationnelles de x.

J'ai réduit de cette manière au plus petit nombre possible les fonctions transcendantes contenues dans l'expression:

$$\int \frac{r\,dx}{\sqrt[m]{R}},$$

où R est une fonction entière, et r une fonction rationnelle. J'ai découvert de même des propriétés générales de ces fonctions. Savoir:

Soient p_0, p_1, p_2, ... p_{m-1} des fonctions entières quelconques d'une quantité indéterminée x, et regardons les coefficiens des puissances de x dans ces fonctions comme des *variables*. Soient de même α^0, α^1, α^2, ... α^{m-1} les racines de l'équation $\alpha^m = 1$, m étant premier ou non, et faisons:

$$s_k = p_0 + \alpha^k p_1 R^{\frac{1}{m}} + \alpha^{2k} p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + \alpha^{(m-1)k} R^{\frac{m-1}{m}}.$$

Cela posé, en formant le produit:

$$s_0 s_1 s_2 \ldots s_{m-1} = V,$$

V sera comme vous voyez une fonction entière de x. Maintenant si l'on désigne par x_1, x_2, ... x_μ les racines de l'équation $V = 0$, la fonction transcendante

$$\psi x = \int \frac{dx}{(x-a) R^{\frac{n}{m}}},$$

où $\frac{n}{m} < 1$, et a une quantité quelconque, aura la propriété suivante:

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \cdots + \psi(x_\mu)$$
$$= C + \frac{1}{R'^{\frac{n}{m}}} \left(\log(s_0') + \alpha^n \log(s_1') + \alpha^{2n} \log(s_2') + \cdots + \alpha^{(m-1)n} \log(s'_{m-1})\right),$$

C étant une constante, et

$$R', \ s_0', \ s_1', \ \ldots s'_{m-1}$$

les valeurs que prendront respectivement les fonctions

$$R, \ s_0, \ s_1, \ \ldots s_{m-1},$$

en écrivant simplement a au lieu de x.

Rien n'est plus facile que la démonstration de ce théorème. Je la donnerai dans un de mes mémoires prochains dans le journal de M. *Crelle*. Un corollaire bien remarquable du théorème précédent est le suivant.

Si l'on fait $\varpi(x) = \int \frac{r\,dx}{R^{\frac{n}{m}}}$, où r est une fonction quelconque entière de x, dont le degré est moindre que $\frac{n}{m}\nu - 1$, où ν est le degré de R, la fonction $\varpi(x)$ est telle que

$$\varpi(x_1) + \varpi(x_2) + \cdots + \varpi(x_\mu) = \text{const.}$$

Si par exemple $m = 2$, $n = 1$, $\nu = 4$, on aura $r = 1$, donc

$$\varpi(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{R}} \quad \text{et} \quad \varpi(x_1) + \varpi(x_2) + \cdots + \varpi(x_\mu) = C.$$

C'est le cas des fonctions elliptiques de la première espèce.

Les belles applications que vous avez données des fonctions elliptiques à l'intégration des formules différentielles, m'ont engagé à considérer un problème très général à cet égard, savoir:

Trouver s'il est possible d'exprimer une intégrale de la forme $\int y\,dx$, où y est une fonction algébrique quelconque, par des fonctions algébriques, logarithmiques et *elliptiques* de la manière suivante:

$$\int y\,dx = \text{fonct. algéb. de } (x, \ \log v_1, \ \log v_2, \ \log v_3, \ \ldots \Pi_1 z_1, \ \Pi_2 z_2, \ \Pi_3 z_3, \ \ldots),$$

v_1, v_2, v_3, ... z_1, z_2, z_3, ... étant des fonctions algébriques de x les plus générales possibles, et Π_1, Π_2, Π_3, etc. désignant des fonctions elliptiques quelconques en nombre fini. J'ai fait le premier pas vers la solution de ce problème, en démontrant le théorème suivant:

"S'il est possible d'exprimer $\int y\,dx$ comme on vient de le dire, on pourra toujours donner à son expression la forme suivante:

$$\int y\,dx = t + A_1 \log t_1 + A_2 \log t_2 + \cdots + B_1 \Pi_1(y_1) + B_2 \Pi_2(y_2) + B_3 \Pi_3(y_3) + \cdots,$$

où t, t_1, t_2, ... y_1, y_2, y_3, ... sont toutes des fonctions *rationnelles* de x et y; mais en conservant à la fonction y toute sa généralité, j'ai été arrêté là par des difficultés qui surpassent mes forces et que je ne vaincrai jamais. Je me suis donc contenté de quelques cas particuliers, surtout de celui où y est de la forme $\frac{r}{\sqrt{R}}$, r et R étant deux fonctions rationnelles quelconques de x. Cela est déjà très général. J'ai reconnu qu'on pourra mettre l'intégrale $\int \frac{r\,dx}{\sqrt{R}}$ sous cette forme:

$$\int \frac{r\,dx}{\sqrt{R}} = p\sqrt{R} + A' \log\left(\frac{p'+\sqrt{R}}{p'-\sqrt{R}}\right) + A'' \log\left(\frac{p''+\sqrt{R}}{p''-\sqrt{R}}\right) + \cdots$$
$$\cdots + B_1 \Pi_1(y_1) + B_2 \Pi_2(y_2) + B_3 \Pi_3(y_3) + \cdots,$$

où toutes les quantités y_1, y_2, y_3, ... p, p', p'', ... sont des fonctions *rationnelles* de la variable x".

J'ai démontré ce théorème dans le mémoire sur les fonctions elliptiques qui va être imprimé dans le journal de M. *Crelle**). Il m'a été extrêmement utile pour donner la généralité la plus grande possible à la théorie de la transformation. Ainsi j'ai non seulement comparé entre elles deux fonctions, mais un nombre quelconque de fonctions. Je suis conduit à ce résultat remarquable:

Si l'on a entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques des trois espèces avec les modules c, c', c'', c''', ... une relation quelconque de la forme:

$$A\,\Pi x + A'\Pi_1 x_1 + A''\Pi_2 x_2 + A'''\Pi_3 x_3 + \cdots + A^{(n)}\Pi_n x_n = v,$$

*) T. I, p. 518 de cette édition.

où $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ sont des variables liées entre elles par un nombre quelconque d'équations algébriques, et v une expression algébrique et logarithmique: les modules $c', c'', c''', \ldots$ doivent être tels qu'on puisse satisfaire aux équations:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = a' \frac{dx'}{\sqrt{(1-x'^2)(1-c'^2x'^2)}} = a'' \frac{dx''}{\sqrt{(1-x''^2)(1-c''^2x''^2)}} = \text{etc.}$$

en mettant pour $x', x'', x''', \ldots$ des fonctions *rationnelles* de x; $a', a'', \ldots$ étant des constantes. Ce théorème réduit la théorie générale des fonctions elliptiques à celle de la transformation d'une fonction en une autre.

Ne soyez pas fâché, Monsieur, que j'aie osé vous présenter encore une fois quelques-unes de mes découvertes. Si vous me permettez de vous écrire, je désirerais bien vous en communiquer un bon nombre d'autres, tant sur les fonctions elliptiques et les fonctions plus générales, que sur la théorie des équations algébriques. J'ai été assez heureux pour trouver une règle sûre à l'aide de laquelle on pourra reconnaître si une équation quelconque proposée est résoluble à l'aide de *radicaux* ou non. Un corollaire de ma théorie fait voir que généralement il est *impossible* de résoudre les équations supérieures au quatrième degré.

Agréez etc.

Christiania, le 25 novembre 1828.

Il me tarde beaucoup de connaître l'ouvrage de M. *Jacobi*. Il doit s'y trouver des choses merveilleuses. Certainement M. *Jacobi* va perfectionner à un degré inespéré non seulement la théorie des fonctions elliptiques, mais encore les mathématiques en général. Je l'estime on ne peut plus.