
 SUR L'IRRATIONALITÉ DU NOMBRE

$$e = 2,718\dots;$$

PAR J. LIOUVILLE.

On prouve dans les éléments que le nombre e , base des logarithmes népériens, n'a pas une valeur rationnelle. On devrait, ce me semble, ajouter que la même méthode prouve aussi que e ne peut pas être racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels, en sorte que l'on ne peut pas avoir $ae + \frac{b}{e} = c$, a étant un entier positif et b, c , des entiers positifs ou négatifs. En effet, si l'on remplace dans cette équation e et $\frac{1}{e}$ ou e^{-1} par leurs développements déduits de celui de e^x , puis qu'on multiplie les deux membres par $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$, on trouvera aisément

$$\frac{a}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \dots \right) \pm \frac{b}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+2} + \dots \right) = \mu,$$

μ étant un entier. On peut toujours faire en sorte que le facteur

$$\pm \frac{b}{n+1}$$

soit positif; il suffira de supposer n pair si b est < 0 et n impair si b est > 0 ; en prenant de plus n très grand, l'équation que nous venons d'écrire conduira dès lors à une absurdité; car son premier membre étant essentiellement positif et très petit, sera compris entre 0 et 1, et ne pourra pas être égal à un entier μ . Donc, etc.
